Chapitre 1

Etudier la mécanique

- **14 chapitres** (théorie, expériences, applications)
- **14 séances d'exercices**
- **10 séances de soutien** dès le 30 septembre (semaine 4)
- **Moodle (EPFL)** : PHYS-101(f)

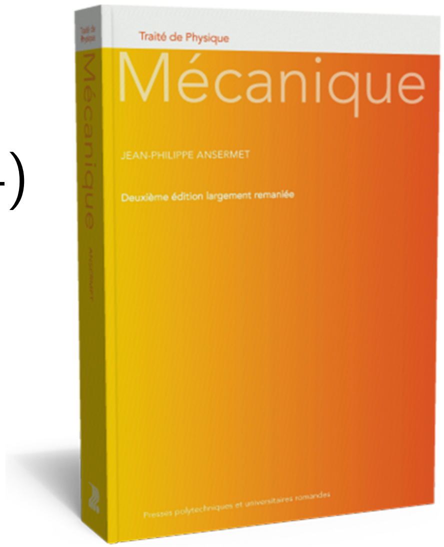
  https ://moodle.epfl.ch/course/view.php ?id=14237
- **Warm Up Mooc - EPFL** :

  https ://www.swissmooc.ch/courses/warm-up/
- **Livre de cours** :

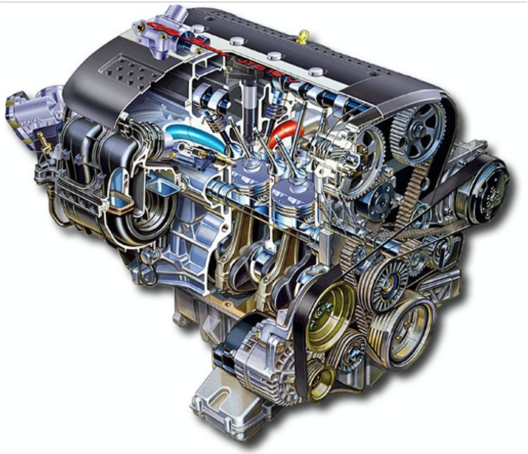
  Mécanique

  J.-Ph. Ansermet

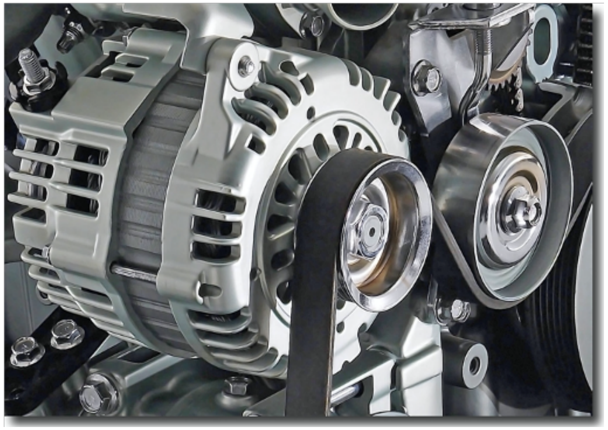
  Presses polytechniques universitaires romandes



1. Introduction et outils mathématiques
2. Cinématique et dynamique du point matériel
3. Frottements et balistique
4. Oscillateur harmonique et mouvement circulaire
5. Coordonnées cylindriques, sphériques et rotations
6. Contraintes, puissance, travail et énergie cinétique
7. Energie potentielle, énergie mécanique et résonance
8. Loi d'action-réaction, collisions
9. Moment cinétique, moment de force et loi de la gravitation
10. Système de masse variable et référentiels accélérés
11. Dynamique terrestre, pendule de Foucault et syst. de pts matériels
12. Cinématique et dynamique du solide indéformable
13. Solide indéformable avec un axe fixe et gyroscopes
14. Mécanique classique et mécanique quantique



1. **Mécanique** (grec “$M\eta\chi\alpha\nu\iota\kappa\eta''$)
   - **Equilibre** (statique)
   - **Mouvement** (dynamique)
   - **Déformation**

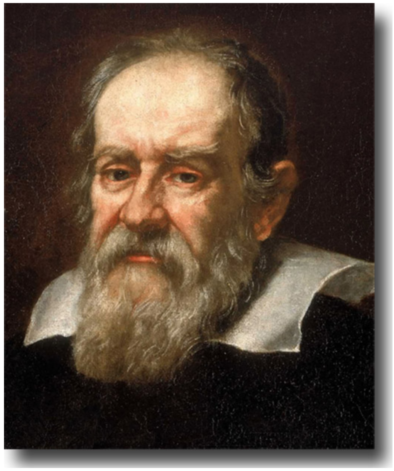


2. **Etude de la mécanique**
   - **Raison historique**
   - **Raison méthodologique et pédagogique**

Aristote
384 – 325 av. J.-C.

1. **Dichotomie :** mouvement parfait des corps célestes $\leftrightarrow$ mouvement corrompu des corps terrestres
2. **Méthodologie non-scientifique :** pas d'interaction entre théorie et expérience

Galileo Galilei
1564 – 1642



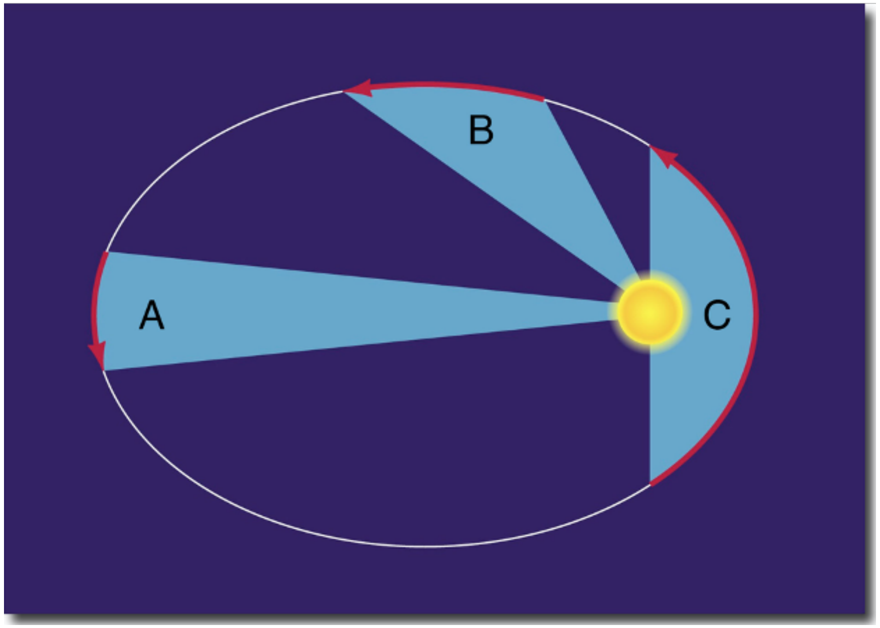
1. **Expérience :** interroger la nature (méthodologie scientifique)
2. **Théorie :** langage mathématique

Johannes Kepler
$1571 - 1630$

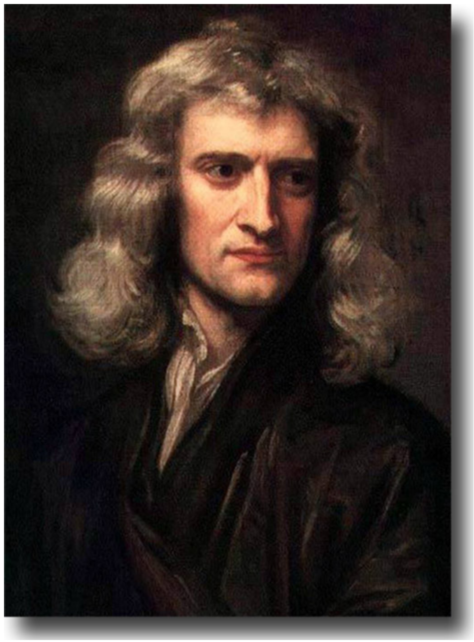
Tycho Brahé
$1546 - 1601$

Mécanique céleste : 3 lois

1. **Loi des orbites :**
   ellipse, soleil $=$ foyer
2. **Loi des aires :**
   aire$/$temps $=$ constante
3. **Loi des périodes :**
   période$^2/$demi grand-axe^3 $=$ constante

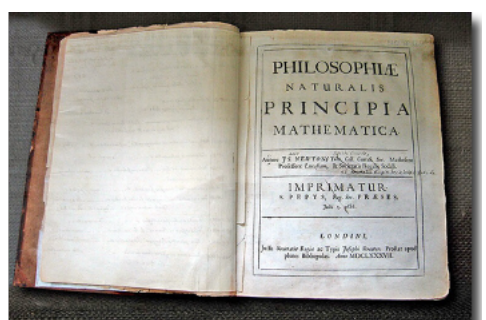


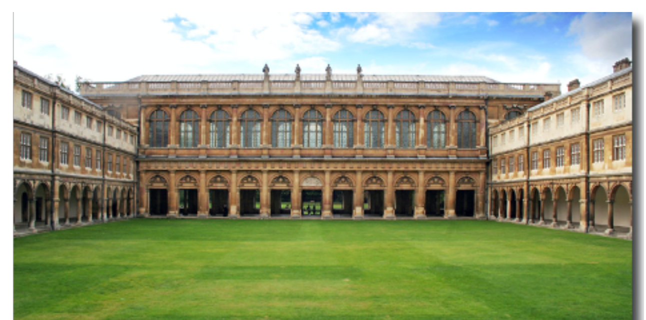
Sir Isaac Newton
1643 – 1727



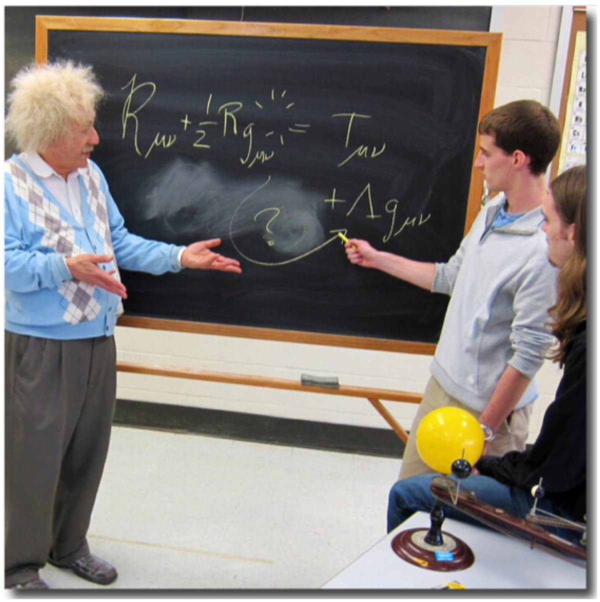
Mécanique classique : céleste et terrestre

1. **Théorie physique :**
   Lois de la mécanique (3 lois)
2. **Théorie mathématique :**
   Calcul différentiel et intégral





1.1.5 Objectifs



1. Modéliser conceptuellement un phénomène physique
2. Transcrire mathématiquement le modèle physique
3. Appliquer des lois physiques et résoudre un système d'équations
4. Apprendre à connaître les limites des modèles et des théories
5. Développer un savoir-faire par la résolution de problèmes
6. Adopter une approche systématique
7. Maîtriser les outils mathématiques dans le contexte de la physique
8. Découvrir les mathématiques par la physique

Henri Poincaré
1854 – 1912

- **Mécanique classique :** théorie universelle fin XVII^e siècle → fin XIX^e siècle
- **Mécanique classique :** remise en cause fin XIX^e siècle et début XX^e siècle

1. **Théorie du chaos :** Poincaré 1889 et Lorenz 1960
2. **Relativité restreinte :** Einstein 1905
3. **Mécanique quantique :** Schrödinger, Heisenberg 1925

Déterminisme - Marquis de Laplace à l'Empereur Napoléon Bonaparte

Sire, donnez-moi les conditions initiales et je vous prédirai l'évolution du monde.

1. **Importance historique** :

   décrire les phénomènes physiques

2. **Importance symbolique** :

   rester dans l'interrogation de la nature

3. **Importance méthodologique** :

   repérer le passage du réel au modèle

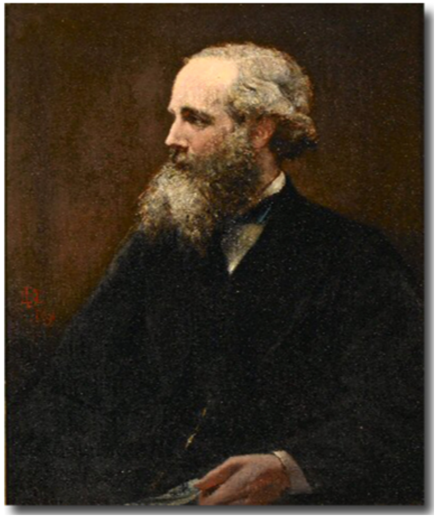
4. **Importance didactique** :

   lien entre enseignement et vie quotidienne, curiosité scientifique

Théorie et expérience

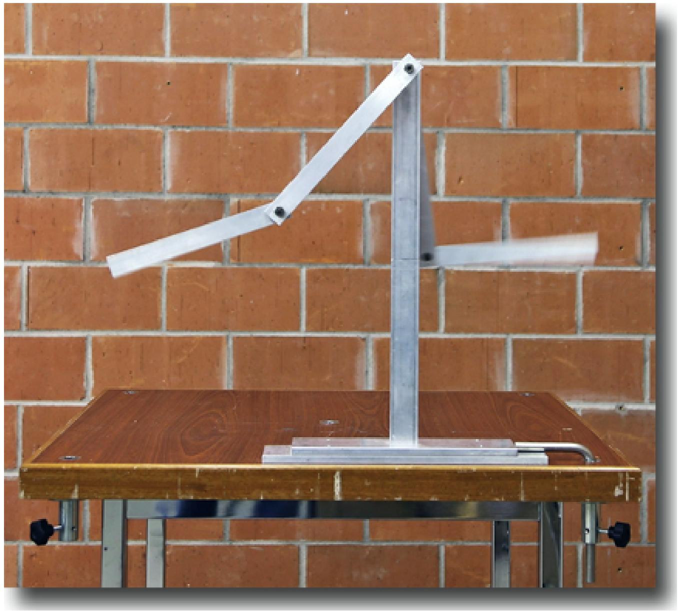
Je n'ai pas de raison de penser que l'intelligence humaine soit capable de conceptualiser les lois physiques en se basant uniquement sur ses propres ressources sans faire appel aux résultats expérimentaux. De telles tentatives se sont toujours soldées par des théories artificielles et pleines de contradictions.

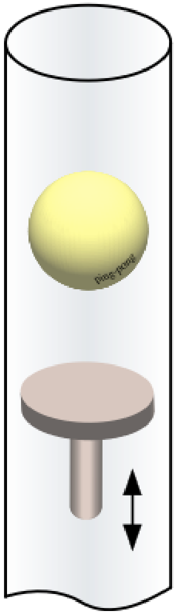
James Clerk Maxwell
1831 – 1879

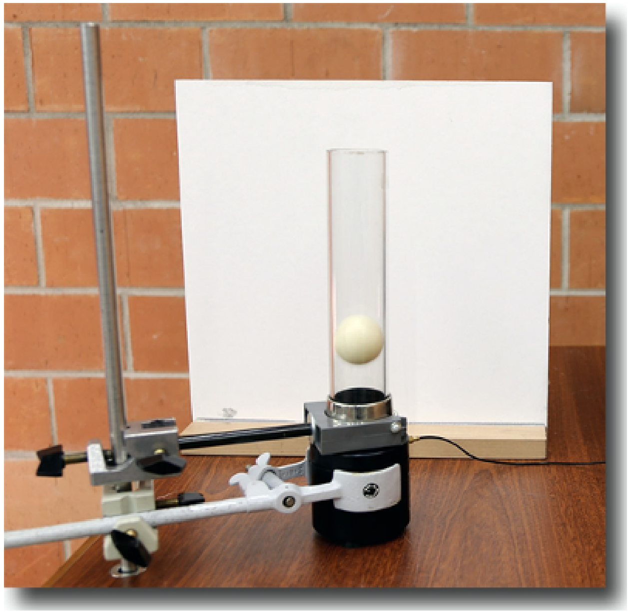


- La toupie est un aimant qui, lorsqu'il est en rotation au-dessus d'un autre aimant d'aimentation opposée est soumis à une force magnétique répulsive. Cette force magnétique répulsive compense son poids et permet à la toupie de léviter. . .

- Le verre est excité acoustiquement à l'aide d'un haut-parleur à sa fréquence de résonance. Il est d'abord déformé, puis il se casse...







1. **Pendules articulés :** si deux pendules articulés sont lancés avec des amplitudes initiales comparables et suffisamment importantes, leurs mouvements se désynchronisent rapidement (sensibilité aux conditions initiales).

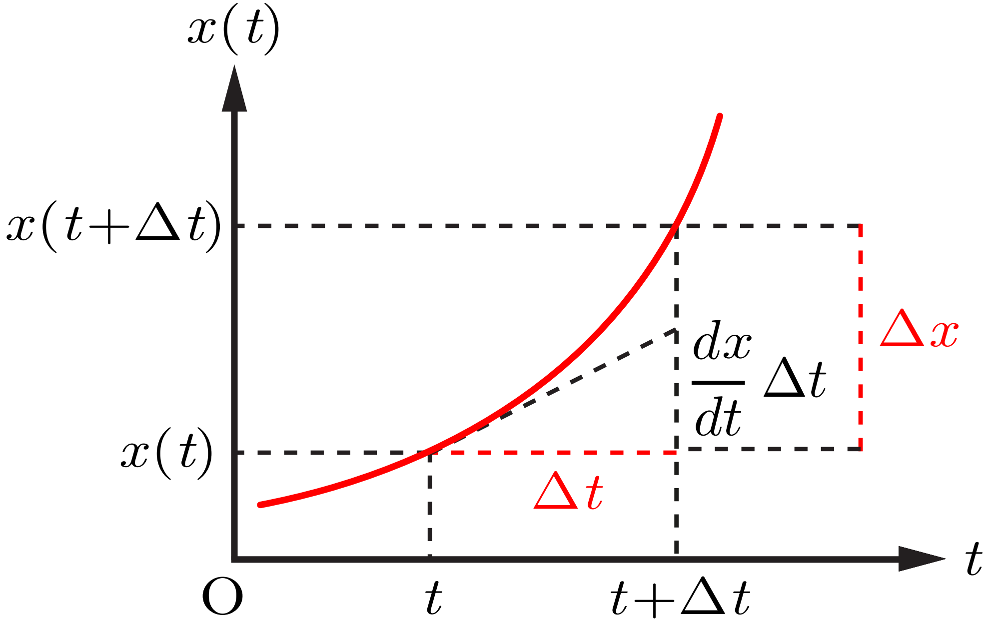
2. **Balle de ping-pong :** une balle de ping-pong rebondit sur une plateforme astreinte à un mouvement périodique bien déterminé. Lorsque le tube est ouvert, la fréquence des rebonds est aléatoire (chaotique). Avec le frottement imposé par le bouchon, le mouvement devient périodique.

- **Dérivée** : on appelle dérivée la limite infinitésimale du rapport de la variation d'une fonction et de la variation de sa variable.

1. **Vitesse** : dérivée de la position $x(t)$ par rapport au temps t :

$$v(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{1.1}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{x(t + dt) - x(t)}{dt} \quad \text{ainsi} \quad dx = v\,dt \tag{1.2}$$



Graphiquement, la vitesse $v(t)$ est la pente de la position $x(t)$ au temps t.

2. **Accélération** : dérivée de la vitesse $v\left(t\right)$ par rapport au temps t :

$$a\left(t\right) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v\left(t\right)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\left(t + \Delta t\right) - v\left(t\right)}{\Delta t} \tag{1.3}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{v\left(t + dt\right) - v\left(t\right)}{dt} \quad \text{ainsi} \quad dv = a\, dt \tag{1.4}$$

$$a\left(t\right) = \frac{d^2 x}{dt^2} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \left(\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x\left(t\right)}{\Delta t} \right)}{\Delta t} = \frac{d \left(\dfrac{dx\left(t\right)}{dt} \right)}{dt} \tag{1.5}$$

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)^2 x = \frac{d^2 x}{dt^2} \tag{1.6}$$

3. **Dérivée temporelle** (notation de physicien) :

$$v = \dot{x} \tag{1.7}$$

$$a = \dot{v} = \ddot{x} \tag{1.8}$$

- **Composition de fonctions** : $h(t) \equiv (f \circ g)(t) = f(g(t))$ (1.9)

1. **Dérivée de** $g(t)$:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{g(t+dt) - g(t)}{dt} \quad \text{ainsi} \quad g(t+dt) = g(t) + dg \tag{1.10}$$

2. **Dérivée de** $f(g)$:

$$\frac{df}{dg} = \frac{f(g+dg) - f(g)}{dg} \quad \text{ainsi} \quad f(g+dg) = f(g) + \underbrace{\frac{df}{dg}\,dg}_{=df} \tag{1.11}$$

3. **Dérivée de** $h(t) = f(g(t))$:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{f(g(t+dt)) - f(g(t))}{dt} \overset{(1.10)}{=\!=} \frac{f(g(t)+dg) - f(g(t))}{dt}$$

$$\overset{(1.11)}{=\!=} \frac{\cancel{f(g(t))} + \frac{df}{dg}\,dg - \cancel{f(g(t))}}{dt} \tag{1.12}$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{d(f \circ g)}{dt} = \frac{df}{dg}\,\frac{dg}{dt}} \tag{1.13}$$

- **Exemples physiques** :

  1. **Dérivée de la position** : oscillateur harmonique

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{1.14}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\left(A\cos(\omega t + \varphi)\right)}{d(\omega t + \varphi)}\,\frac{d(\omega t + \varphi)}{dt} = -\,A\,\omega\sin(\omega t + \varphi) \tag{1.15}$$

  2. **Dérivée de l'énergie cinétique d'un objet de masse** m :

$$T(t) = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 \tag{1.16}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d\left(\dfrac{1}{2}\,m\dot{x}^2\right)}{d\dot{x}}\,\frac{d\dot{x}}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} = \underbrace{m\ddot{x}}_{\text{force}}\;\underbrace{\dot{x}}_{\text{vitesse}} \tag{1.17}$$

- **Dérivée de la fonction** $f(x)$ **par rapport à** x :

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.18}$$

- **Identité infinitésimale** :

$$f(x+dx) \overset{(1.18)}{=\!=} f(x) + \frac{df}{dx}\, dx \tag{1.19}$$

- **Approximation** $\Delta x \ll x$:

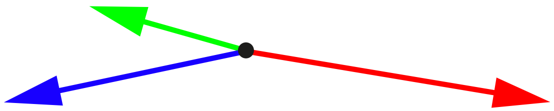
$$\frac{df}{dx} \simeq \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.20}$$

$$\boxed{f(x+\Delta x) \simeq f(x) + \frac{df}{dx}\, \Delta x \qquad (1.21)}$$

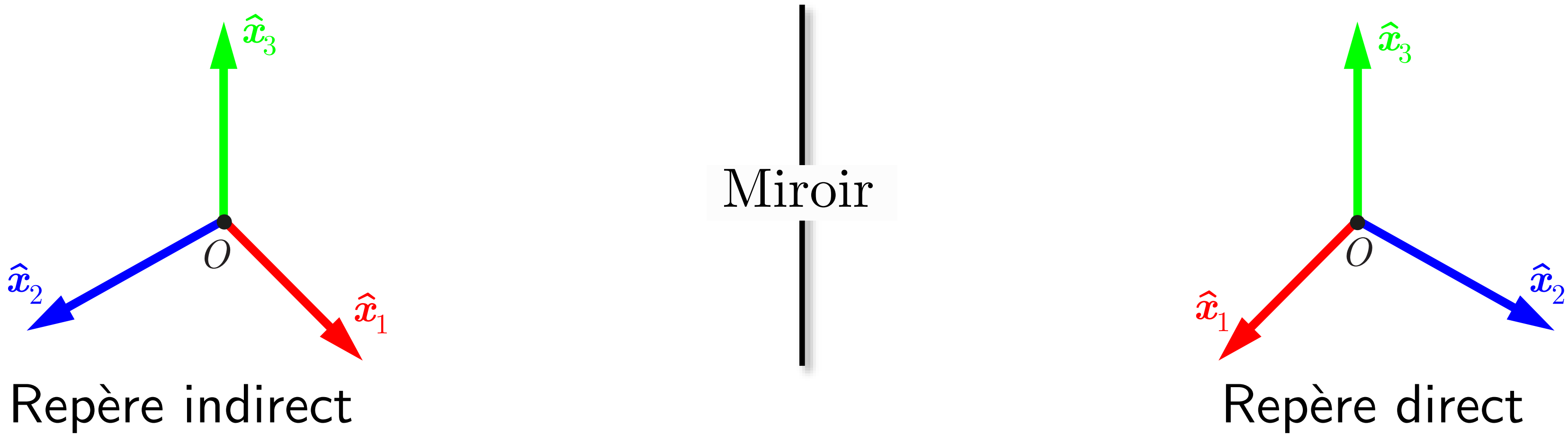
- La relation (1.21) est le **développement limité** (ou de Taylor) au 1^{er} ordre en Δx de $f(x+\Delta x)$ autour de x.

- **Vecteur** : élément de droite orientée (norme, orientation)

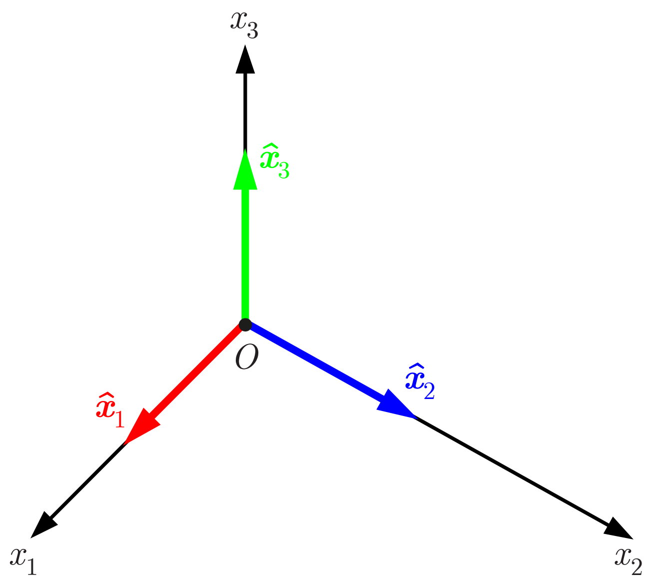
- **Repère** : entité géométrique constituée de trois vecteurs linéairement indépendants attaché à un point (origine).



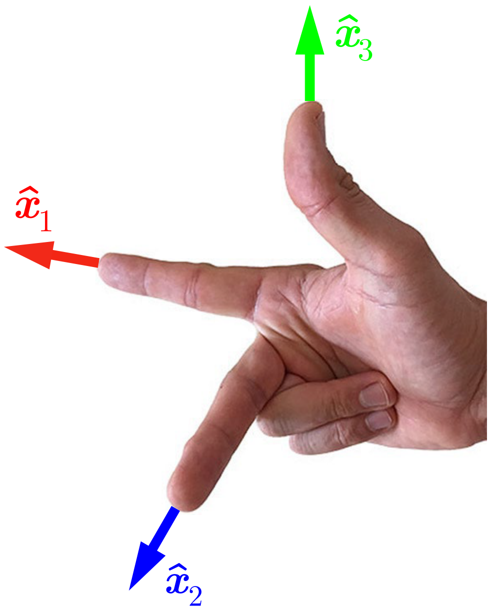
- **Repère orthonormé** : les vecteurs de base sont orthogonaux et de norme unité (deux types)



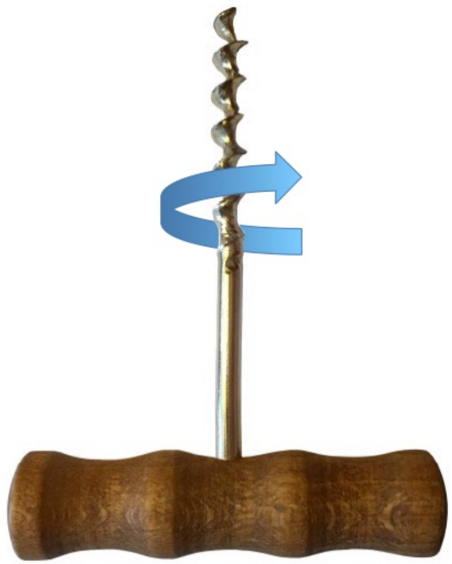
- **Repère direct** : un repère direct est un repère orthonormé dont les vecteurs de base satisfont la règle de la main droite ou la règle du tire-bouchon $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$.



Repère direct



Règle de la main droite



Règle du tire-bouchon

- **Produit scalaire** : scalaire obtenu par produit symétrique des coordonnées identiques de deux vecteurs exprimés par rapport à un repère direct $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$.

$$\boldsymbol{a} = a_1\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + a_2\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + a_3\,\hat{\boldsymbol{x}}_3 \tag{1.22}$$

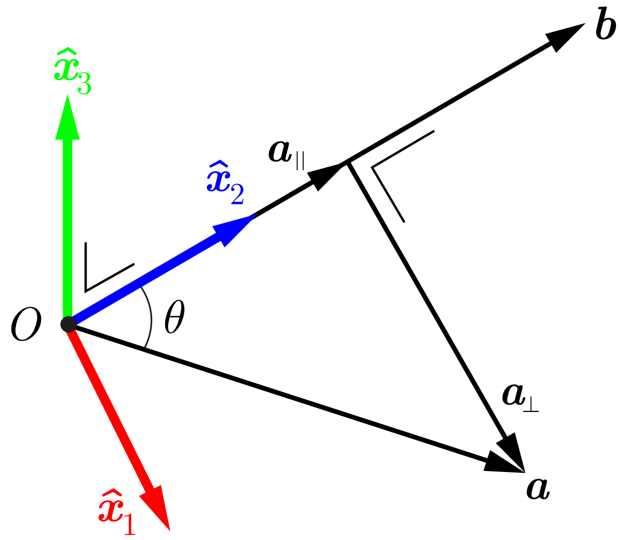
$$\boldsymbol{b} = b_1\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + b_2\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + b_3\,\hat{\boldsymbol{x}}_3$$

- **Expression mathématique** :

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3 \tag{1.23}$$

1. **commutatif** : $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ (1.24)
2. **vecteurs de base** : $\hat{\boldsymbol{x}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{x}}_j = \delta_{ij} \qquad \forall\ i, j = 1, 2, 3$ (1.25)

$$\text{où} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \tag{1.26}$$



- Décomposition du vecteur $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\parallel} + \boldsymbol{a}_{\perp} \tag{1.27}$$

- Vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\| \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{x}}_1 + \|\boldsymbol{a}\| \cos\theta \, \hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{b}\| \, \hat{\boldsymbol{x}}_2 \tag{1.28}$$

où $\|\boldsymbol{a}\| \equiv$ norme du vecteur $\boldsymbol{a}$
$\|\boldsymbol{b}\| \equiv$ norme du vecteur $\boldsymbol{b}$

- Produit scalaire (1.23) compte tenu de (1.25) :

$$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta} \tag{1.29}$$

- Vecteurs $\boldsymbol{a}_{\parallel}$ et $\boldsymbol{a}_{\perp}$:

$$\boldsymbol{a}_{\parallel} = \|\boldsymbol{a}\| \cos\theta \, \hat{\boldsymbol{x}}_2 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{a}_{\perp} = \|\boldsymbol{a}\| \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{x}}_1 \tag{1.30}$$

- **Propriétés du produit scalaire** :

1. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2$ 2. $\boldsymbol{a}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 3. $\boldsymbol{a}_{\perp} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ (1.31)

- **Produit vectoriel** : vecteur obtenu par produit antisymétrique des coordonnées différentes de deux vecteurs et d'un autre vecteur de base d'un repère direct $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$.

$$\boldsymbol{a} = a_1\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + a_2\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + a_3\,\hat{\boldsymbol{x}}_3 \tag{1.22}$$

$$\boldsymbol{b} = b_1\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + b_2\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + b_3\,\hat{\boldsymbol{x}}_3$$

- **Expression mathématique** :

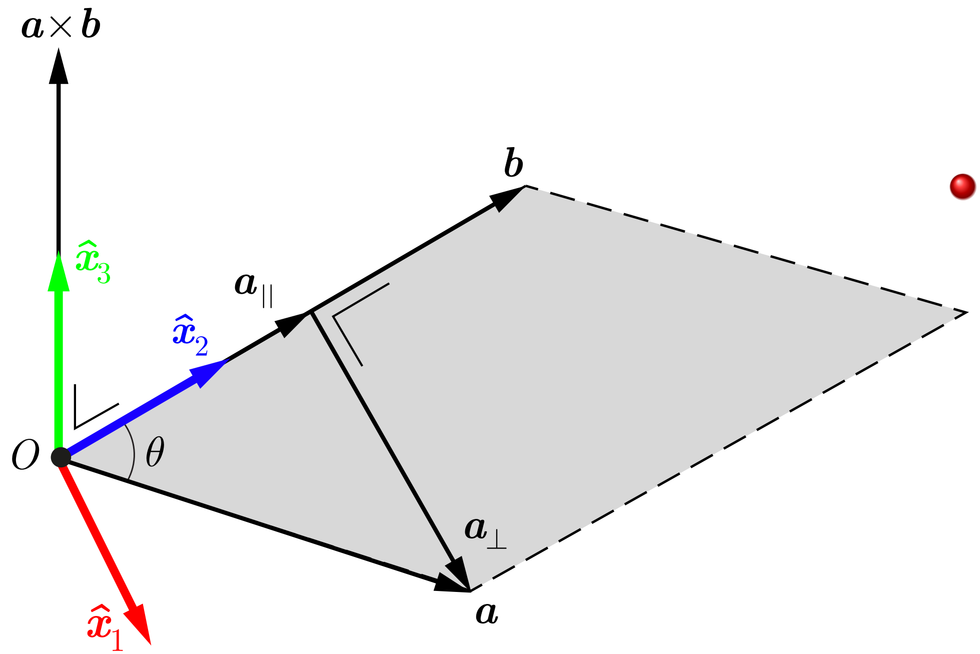
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_2\,b_3 - a_3\,b_2)\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + (a_3\,b_1 - a_1\,b_3)\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,\hat{\boldsymbol{x}}_3 \tag{1.32}$$

1. **anticommutatif** : $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\,\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ (1.33)

2. **vecteurs de base** : $\hat{\boldsymbol{x}}_i \times \hat{\boldsymbol{x}}_j = \varepsilon_{ijk}\,\hat{\boldsymbol{x}}_k \qquad \forall\ i,j,k = 1,2,3$ (1.34)

$$\text{où } \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \varepsilon_{123}\,,\quad \varepsilon_{231}\,,\quad \varepsilon_{312} \\ -1 & \text{pour} \quad \varepsilon_{321}\,,\quad \varepsilon_{213}\,,\quad \varepsilon_{132} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.35}$$

3. **non-associatif** : $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ (1.36)



- Décomposition du vecteur $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\parallel} + \boldsymbol{a}_{\perp} \tag{1.27}$$

- Vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\| \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{x}}_1 + \|\boldsymbol{a}\| \cos\theta \, \hat{\boldsymbol{x}}_2$$

$$\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{b}\| \, \hat{\boldsymbol{x}}_2 \tag{1.28}$$

où $\|\boldsymbol{a}\| \equiv$ norme du vecteur $\boldsymbol{a}$
$\|\boldsymbol{b}\| \equiv$ norme du vecteur $\boldsymbol{b}$

- Produit vectoriel (1.32) compte tenu de (1.34) :

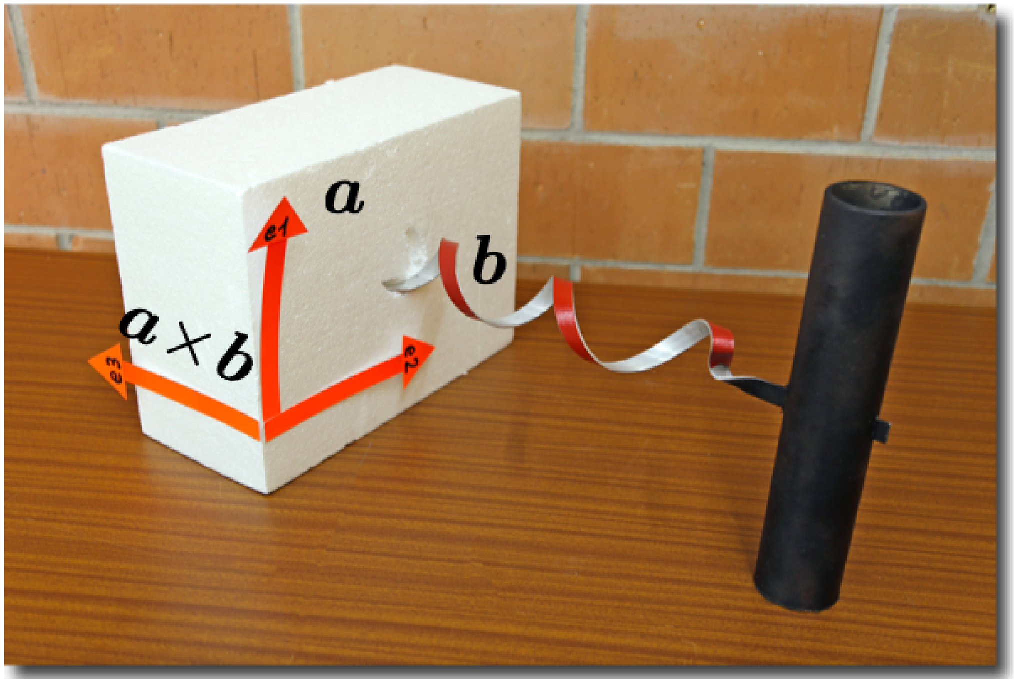
$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \, \|\boldsymbol{b}\| \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{x}}_3 \tag{1.37}$$

- Vecteurs $\boldsymbol{a}_{\parallel}$ et $\boldsymbol{a}_{\perp}$:

$$\boldsymbol{a}_{\parallel} = \|\boldsymbol{a}\| \cos\theta \, \hat{\boldsymbol{x}}_2 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{a}_{\perp} = \|\boldsymbol{a}\| \sin\theta \, \hat{\boldsymbol{x}}_1 \tag{1.30}$$

- **Propriétés du produit vectoriel** :

1. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$
2. $\boldsymbol{a}_{\parallel} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$
3. $\boldsymbol{a}_{\perp} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ (1.38)



- En tournant le manche du tire-bouchon dans le sens des aiguilles d'une montre du vecteur $\boldsymbol{a}$ vers le vecteur $\boldsymbol{b}$, on le visse dans la direction du vecteur $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

- En tournant le manche du tire-bouchon dans le sens trigonométrique du vecteur $\boldsymbol{b}$ vers le vecteur $\boldsymbol{a}$, on le dévisse dans la direction du vecteur $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\,\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

- **Produit mixte** : produit scalaire de deux vecteurs dont l'un est obtenu par produit vectoriel de deux vecteurs.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= a_1\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + a_2\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + a_3\,\hat{\boldsymbol{x}}_3 \\ \boldsymbol{b} &= b_1\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + b_2\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + b_3\,\hat{\boldsymbol{x}}_3 \\ \boldsymbol{c} &= c_1\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + c_2\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + c_3\,\hat{\boldsymbol{x}}_3 \end{aligned} \tag{1.39}$$

- **Expression mathématique** :

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \tag{1.40}$$
$$(a_2\,b_3 - a_3\,b_2)\,c_1 + (a_3\,b_1 - a_1\,b_3)\,c_2 + (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,c_3$$

1. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$
2. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = 0 \qquad (1.41)$

- **Double produit vectoriel** : produit vectoriel de deux vecteurs dont l'un est obtenu par produit vectoriel de deux vecteurs.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = & \Big(a_2\,(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3\,(b_3c_1 - b_1c_3)\Big)\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 \\ & + \Big(a_3\,(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1\,(b_1c_2 - b_2c_1)\Big)\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 \\ & + \Big(a_1\,(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2\,(b_2c_3 - b_3c_2)\Big)\,\hat{\boldsymbol{x}}_3 \end{aligned} \tag{1.42}$$

- **Vecteur** : antisymétrique par permutation de $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ et orthogonal à $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$

$$\begin{aligned} & (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c} = \\ & \Big((\cancel{a_1c_1} + a_2c_2 + a_3c_3)\,b_1 - (\cancel{a_1b_1} + a_2b_2 + a_3b_3)\,c_1\Big)\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 \\ & + \Big((a_1c_1 + \cancel{a_2c_2} + a_3c_3)\,b_2 - (a_1b_1 + \cancel{a_2b_2} + a_3b_3)\,c_2\Big)\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 \\ & + \Big((a_1c_1 + a_2c_2 + \cancel{a_3c_3})\,b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2 + \cancel{a_3b_3})\,c_3\Big)\,\hat{\boldsymbol{x}}_3 \end{aligned} \tag{1.43}$$

- **Identité vectorielle** :

$$\boxed{\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}} \tag{1.44}$$